



TITLE:

# Graphs with "Fat" Vertices(Topological Graph Theory)

AUTHOR(S):

北久保, 茂

---

CITATION:

北久保, 茂. Graphs with "Fat" Vertices(Topological Graph Theory). 数理解析研究所講究録 1989, 686: 153-161

ISSUE DATE:

1989-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101228>

RIGHT:

## Graphs with "Fat" Vertices

東京工大 北久保 茂 (Shigeru Kitakubo)

本稿は, C. McA. Gordon と J. Luecke の "Knots are Determined by their Complements" の紹介である。以下, 定理等の番号は, 原論文の番号づけに従う。

### Introduction

結び目についての従来の結果は, 「結び目型が同じ」  $\Rightarrow$  「結び目の補空間が同相」  $\Rightarrow$  「結び目群が同型」 ということである。この論文の結果は ①の逆方向である。

Th. 1 2つの結び目の補空間が同相ならば, それらは同値である。

さらに, Whitten の 「結び目群が同型な2つの素な結び目の補空間は同相である」という定理により, 次の Corollary が導かれる。

Cor. 1.1 2つの素な結び目の結び目群が同型ならば, 2つの結び目は同値である。

Dehn surgery に関しては次の定理が導かれる。

Th. 2 自明でない結び目  $\alpha$  の自明でない Dehn surgery は  $S^3$  を生じない。

Th. 2 を証明するための命題が2つある。それを紹介するために定義をする。

$K$  を  $S^3$  内の自明でない結び目とし、 $N(K)$  を  $K$  の tubular neighborhood とする。そして、 $X = S^3 - \text{int } K$  を  $K$  の exterior とする。次に  $\rho$  を  $\partial X$  上の slope、すなわち essential simple loop の unoriented isotopy class とし、 $K$  の  $\rho$ -Dehn surgery により得られる閉3-多様体を  $K(\rho)$  とする。 $\gamma$  を  $K$  の meridian の slope とする。この時、自明な Dehn surgery は、 $K(\gamma) \cong S^3$  を生じる。 $\pi$  を  $\partial X$  上の別の slope とし、 $\gamma$  と  $\pi$  の minimal geometric intersection number  $n \geq 1$  をもつとする。

Prop. 1  $K(\pi) \cong S^3$  ならば、 $X$  に proper に埋め込まれ次を満たす planar surface  $P, Q$  が存在する:

- i)  $\partial P (\partial Q)$  は  $\pi (\gamma)$  の parallel copy からなる。
- ii)  $P$  と  $Q$  は transverse に交わり、 $\partial P$  の各成分は  $\partial Q$  の各成分と  $n$  点で交わる。
- iii)  $P \cap Q$  のどの arc も  $P$  や  $Q$  と boundary-parallel でない。

$P$  と  $Q$  の構成は結び目の thin presentation を用いた [Ga] に基づく。

Prop. 2  $X$  が Prop. 1 の i) ~ iii) を満たす properly embedded planar surfaces  $P, Q$  をもつとする。(但し  $Q$  は  $K$  の thin presentation における level sphere と  $X$  との交わり) この時  $K(\pi)$  は lens space を connected summand としてもつ。

$P$  と  $Q$  の boundary component に disk を cap off して、これらの disk が  $S^2$  のグラフ  $G_P, G_Q$  の "fat" vertex を形成するとみなす。  $G_P(G_Q)$  の辺は  $P(Q)$  の中の  $P \cap Q$  の arc に対応する。  $G_P$  の (disk) face は  $P$  の subdisk に対応するが、これは、boundary が  $Q \cup \partial N(K)$  に含まれて  $K(r)$  中にあるとみなせる。同様に、  $G_Q$  の face は  $K(\pi)$  の中にあるとみなしてよい。これにより、  $K(r)(K(\pi))$  のトポロジカルな性質を、  $G_P(G_Q)$  のグラフ論的性質から推論することができる。  $n \geq 2$  に対してはすでに証明されており [GCLS]、故に Chapter 2 では  $n=1$  とし、Prop. 2 を証明するためグラフ論的技法を述べている。 Chapter 2 の主結果は Prop. 2.0.1 であり、これは次のことを主張している：

$K(\pi)$  が punctured lens space を含むということを示

すようにはある特殊な face (Scharleman cycle) が  $G_Q$  中にあるか、またはグラフ  $G_P$  の中に、ある条件を満たす face の集合がある。

本稿では、組み合わせ的技法を多く用いている Chapter 2 を一部紹介することが目的である。

## Chapter 2 The Combinatorics

### 2.0 定義

$X$  は orientable 3-多様体で、total boundary component  $T$  を含むとする。 $T$  は slope  $\pi$  と  $\gamma$  を含む。 $P, Q$  は  $\partial P, \partial Q \subset T$  となるように  $X$  に proper に埋め込まれている compact planar surface である。さらに、 $\partial P, \partial Q$  の各 component は  $\pi, \gamma$  を表し、 $\partial P$  の各 component は  $\partial Q$  の各 component と  $T$  にだけ 1 回交わる。そして  $P \cap Q$  のどの arc も  $P$  や  $Q$  と boundary parallel でない。

$\partial P, \partial Q$  の component にそれぞれ  $\{1, \dots, p\}, \{1, \dots, q\}$  と番号をつける。ただし、 $T$  の向きづけに従って現れる順に番号をつけて行く。これにより、 $P(Q)$  中の  $P \cap Q$  の arc の端点には、対応する  $Q(P)$  の番号をつけることができる。従って、 $\partial P$  の各 component のまわりには、 $\{1, \dots, q\}$  のラベルが順次 (時計回りまたは反時計回り) に現れることになる。

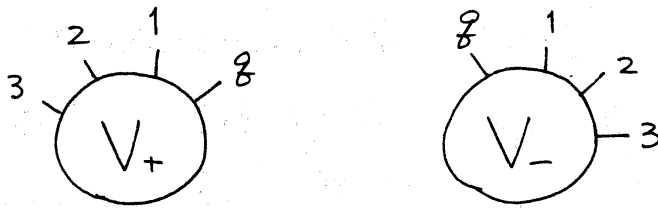


Figure 2.1

$P$  と  $Q$  の boundary component に、前述のラベルの回り方に従って (例えば時計回り) を  $+$ 、反時計回りを  $-$ 、というように) 符号  $\pm$  をつける。  $P \cap Q$  の各 arc に関して、parity rule が成立する:  $P$  上の arc  $\alpha$  により結ばれる  $P$  の boundary component が同符号  $\iff$   $Q$  上の  $\alpha$  により結ばれる  $Q$  の boundary component が異符号。

$P, Q$  の boundary component に disk を cap off し、これら  $\alpha$  disk を 'fat' vertex とみなしてグラフ  $G_P, G_Q$  in  $S^2$  を作る。両グラフの辺は、 $P, Q$  中の  $P \cap Q$  の arc であり、それらは 1 対 1 対応している。また、両グラフの頂点の labelling は parity rule をみだし、両グラフとも自明なループをもたない。グラフ  $G_P$  の concept は以下の通り。

- (1) fat vertex  $v$  と、sign  $v = \pm$ 。
- (2) ラベル  $x \in \{1, \dots, g\}$  と、parity  $x = \pm$  ( $= x$  に対応する  $G_Q$  の頂点の sign)。
- (3)  $(x, v)$  :  $v$  における  $x$  の occurrence。

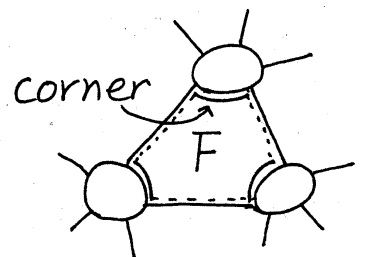
$$\text{Character of } (x, v) = \text{char}(x, v) = (\text{parity } x) \times (\text{sign } v)$$

(4) parity rule: 辺は異なる character の  $(x, v)$  を結ぶ。

2つの頂点の sign が同じである時, 2つの頂点は, parallel であるといい, 異なる時 antiparallel であるという。

$G$  を上述のグラフとする。  $N(G)$  を  $S^2$  における  $G$  の regular neighborhood とすると, face  $F$  は  $\overline{S^2 - N(G)}$  の component である。

$\partial F$  には corner と  $E(G)$  とが交互に現れる。



$G$  の各頂点  $v$  に対し,  $v$  におけるラベルの集合を  $L(v)$  とする。  $\{L(v) \mid v \text{ は } G \text{ のある頂点}\}$  により生成されるグラフ  $G(\{L(v)\})$  を  $G$  の部分グラフで, 少なくとも一方の端点が  $(l, v)$  ( $l \in L(v)$  かつ  $v$  は  $G$  の頂点) であるような辺全体からなるものと定める。

$L$  をラベルの集合とする時,  $G(L)$  を, すべての頂点  $v \in G$  について  $L(v) = L$  とした  $G(\{L(v)\})$  と定義する。

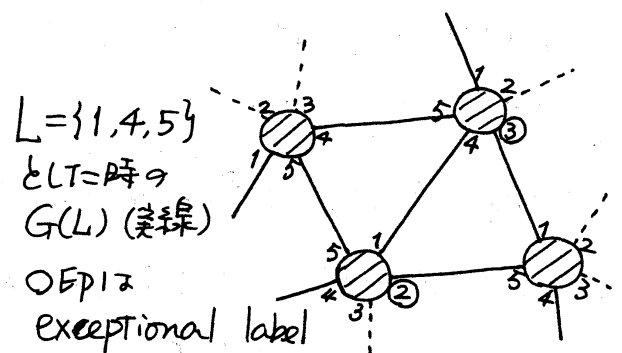
あるラベル  $\alpha$  が  $G(L)$  の

exceptional label で

あるとは,  $\alpha$  が,  $L$  には

属さないが,  $G(L)$  の

ある辺の端点のラベルと

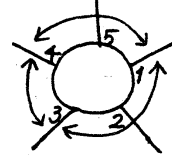


なっていることである。L-interval とは、 $L$  で隣り合ったラベルの間の、fat vertex の boundary 上の区間とする。

m-type は、順序付き  $m$ -組  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) \in \{+, -\}^m$  とし、

$L$ -interval の総数を  $l$  とした時、L-type は、各成分が異なる  $L$ -interval に対応するような

$l$ -type とする。 $L_0 \subset L$ -interval,  $\tau \in L$ -type と ( $\tau$  は時、 $\tau|_{L_0}$  とは、 $\tau$  を  $L_0$  の対応する成分に制限して得られる  $|L_0|$ -type とする。



$L = \{1, 3, 4\}$  のとき  
 $L$ -int. =  $\{1 \sim 3, 3 \sim 4, 4 \sim 1\}$   
 $L$ -type =  $(+, -, -)$   
 (例)

$E$  を  $G(L)$  の disk face,  $\tau \in L$ -type とし、

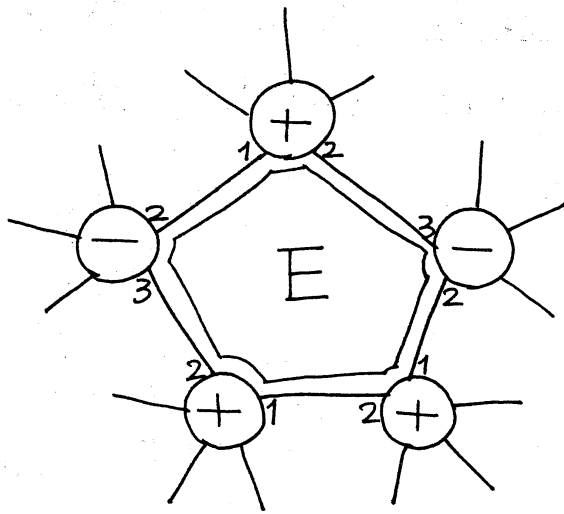
$L_E = \{I \mid I \in L\text{-intervals}, E \text{ のある corner が } I \text{ に含まれる}\}$  とする。このとき、 $E$  が  $\tau$  を表現する とは、次の (1), (2) を満たすことである。

(1) 各  $L$ -interval  $I \in L_E$  に対し、 $v \in V(G)$  における  $E$  の corner が  $I$  に含まれるようなすべての  $v$  が同じ  $\text{sign } \varepsilon(I)$  をもつ。

(2)  $(\varepsilon(I) \mid I \in L_E) = \pm \tau|_{L_E}$

$G(L)$  が  $\tau$  を表現するとは、 $G(L)$  のある disk face が  $\tau$  を表現することである。





$$L = \{1, 2, 3, 5\}$$

とすると.

$$L\text{-int.} = \{1 \sim 2, 2 \sim 3, 3 \sim 5, 5 \sim 1\}$$

$$L\text{-type} = (+, -, -, +) \quad (3311)$$

$$L_E = \{1 \sim 2, 2 \sim 3\}$$

$$\varepsilon(1 \sim 2) = +, \quad \varepsilon(2 \sim 3) = -$$

$$(\varepsilon(I) \mid I \in L_E) = (+, -) = \tau \mid L_E$$

$G$  の  $\alpha$ -cycle  $\sigma$  とは,  $G$  の  $\alpha$  のサイクルで, 次を満たすものである.

(1)  $G$  の頂点を点とみなすと,  $\sigma$  は circle に同相である.

(2) このサイクルに orientation を与え, 各辺の tail のラベルが  $\alpha$  であるようにできる.

(3)  $\sigma$  中の  $G$  の頂点はすべて parallel である.

$G$  中の Scharleman cycle は,  $G$  の  $\alpha$ -cycle  $\Sigma$  で,  $G \cap \text{int } D = \emptyset$  となるような disk  $D$  を bound するものである.

Prop. 2.0.1  $G_P, G_Q$  を上述のグラフとすると,  $G_Q$  が Scharleman cycle を含むか, または  $G_P$  が  $\{1, \dots, 8\}$  4-type すべてを表現する.

## References

- [CGLS] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke, and P. B. Shalen, Dehn surgery on knots, *Annals of Math.* 125 (1987), 237-300.
- [Ga] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds, III*, *J. Differential Geometry* 26 (1987), 479-536.